

Vengono illustrate le varie rappresentazioni matematiche delle funzioni cosenosinusoidali con particolare riguardo al sistema di rappresentazione della somma di due oscillazioni mediante i vettori. E' uno studio questo che sarà di grande giovamento per gli studiosi della televisione a colori.

**L'ABC DELLA
ELETTRONICA**

USO E SIGNIFICATO DEI VETTORI

Per la rappresentazione grafica di una qualsiasi grandezza determinata da due variabili solitamente si impiegano due assi ortogonali. Si scelgono cioè due assi che incrociandosi formano un angolo retto. L'asse orizzontale viene contraddistinto con una x , l'asse verticale con una y . Partendo dalla origine degli assi (0) si è convenuto di considerare positivi (+) i valori lungo l'asse x diretto verso **destra** e parimenti positivi (+) i valori lungo l'asse y diretto **in alto**.

I valori positivi riportati su questi assi sono indicati nei medesimi mediante delle frecce riportate alla rispettiva estremità. In fig. 1 è indicato un sistema di assi ortogonali con i relativi segni. Come grandezza da individuare mediante questo sistema di assi furono scelti i punti P_1 e P_2 . Come si vede, P_1 risulta definito da valori positivi di x e y , precisamente da $+x_1$ e $+y_1$ mentre P_2 risulta definito da un valore positivo di x , e cioè $+x_2$ e da un valore negativo di y , e cioè $-y_2$.

I particolari valori di x e y relativi ad un qualsiasi punto P si ottengono abbas-

sando dal punto P una perpendicolare rispettivamente all'asse x e y .

Viceversa conoscendo valori determinati di x e y è possibile individuare il

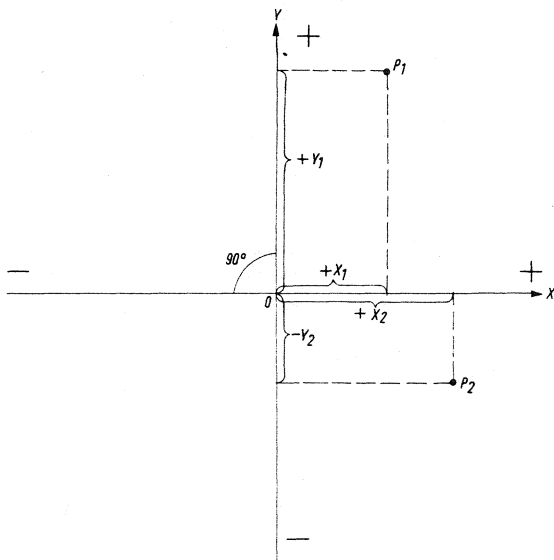


Fig. 1 - Alcune definizioni nel sistema di rappresentazione mediante coordinate ortogonali.

relativo punto P innalzando da questi punti le relative perpendicolari: il loro punto d'incontro individuerà il punto P cercato.

COORDINATE POLARI

Per alcuni determinati scopi è comune più semplice e più logico impiegare per definire un dato punto P, al posto di valori particolari degli assi ortogonali x e y, due altre grandezze equivalenti, per

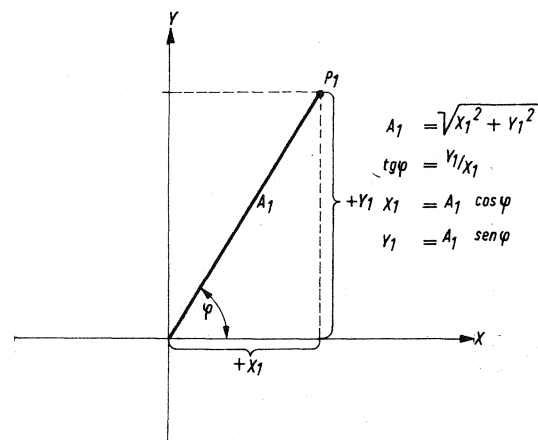


Fig. 2 - Alcune definizioni nel sistema di rappresentazione mediante coordinate polari.

esempio, la lunghezza di una data retta e il valore di un dato angolo. Questa possibilità è indicata in fig. 2. Anche in questo caso si è scelto un dato punto P, che può essere definito come abbiamo visto dai particolari valori x_1 e y_1 sugli assi ortogonali: si conduce da questo punto P_1 una retta passante per l'origine degli assi; si otterrà una semiretta che verrà indicata con A_1 . Questa retta definisce automaticamente anche un determinato angolo φ compreso fra essa e l'asse x. La lunghezza della semiretta A_1 e il valore dell'angolo φ possono essere ricavati dai valori x_1 e y_1 . Infatti, siccome i segmenti x_1 e y_1 formano per definizione un angolo retto, la lunghezza della semiretta A_1 potrà essere facilmente ricavata applicando il **teorema di Pitagora**, e cioè estraendo la radice dalla somma dei quadrati di x_1 e y_1 . Per il calcolo di φ può servire il rapporto y_1/x_1 che fornisce la tangente φ e cioè $\text{tg}\varphi = y_1/x_1$. Mediante queste due semplici formule è quindi possibile, conoscendo i valori x_1 e y_1 relativi al punto P_1

nel sistema di assi ortogonali, passare a due altre grandezze direttamente proporzionali alle precedenti, quali sono appunto la lunghezza di una semiretta e il valore di un angolo. Questo secondo sistema di presentazione è conosciuto come sistema di rappresentazione mediante **coordinate polari**. Quanto alla direzione dell'angolo φ si è convenuto di chiamare **positivi** gli angoli che partendo dall'asse x si estendono verso sinistra, e **negativi** quelli che sem-

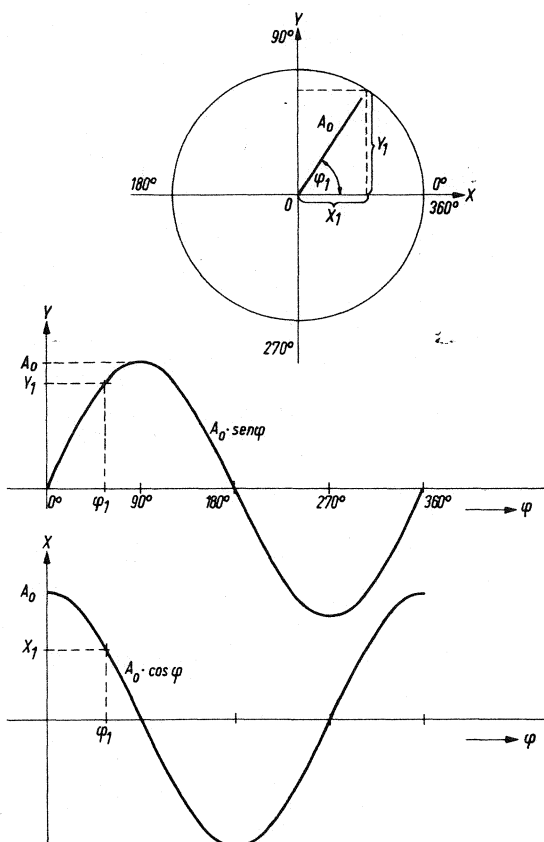


Fig. 3 - Il cerchio-unità con le proiezioni delle funzioni seno e coseno.

pre partendo dall'asse x si estendono verso destra.

In questo sistema di coordinate polari accanto alla funzione tangente possono essere impiegate per la trasformazione delle grandezze x e y anche le funzioni **seno** e **coseno** di corrispondenti valori angolari. Ciò è indicato in fig. 3. Molto opportunamente si pone in questo caso la lunghezza di $A = 1$ e di conseguenza si

otterranno rapporti di ampiezze tutti riferiti all'unità. Se i valori così ottenuti si considerano in tutti e 4 i quadranti, e cioè nel cerchio completo (0° e 360°) si perviene alla rappresentazione del **cerchio unitario** con raggio $A_0 = 1$. Per un determinato angolo scelto a piacere φ e compreso fra il raggio A_0 e l'asse x, è facile dimostrare che le ampiezze della proiezione del raggio A_0 sull'asse y hanno un andamento **sinusoidale**, mentre le ampiez-

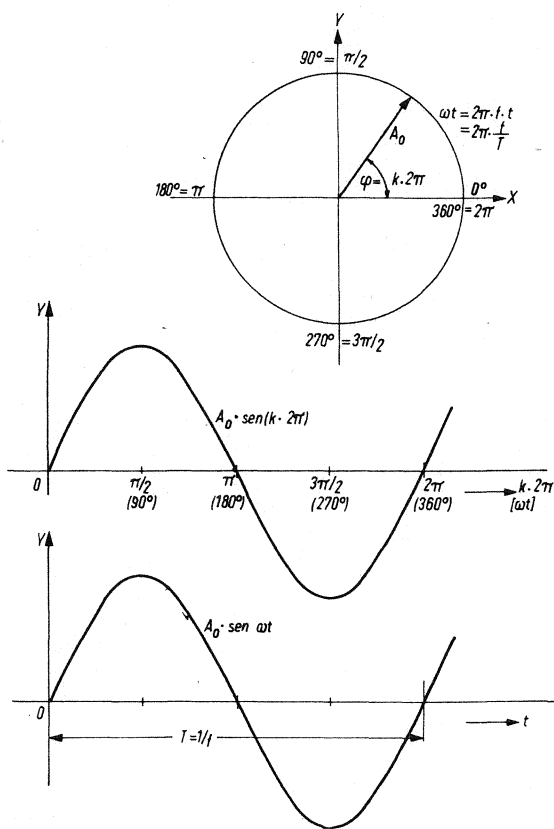


Fig. 4 - Definizione dell'unità-arco (radiante) nel cerchio-unità.

ze della proiezione del raggio A_0 sull'asse x presentano un andamento **cosenosoidale**. In particolare per l'angolo φ , il valore y_1 corrisponde alla funzione ($\text{sen } \varphi = Y_1/A_0$) mentre il valore x_1 corrisponde alla funzione coseno ($\text{cos } \varphi = X_1/A_0$). Se per tutti i valori di angolo compresi fra 0° e 360° si valutano le corrispondenti ampiezze di x e di y, si otterranno i due grafici caratteristici delle funzioni seno e coseno.

Anche questo è indicato nella fig. 3 nella quale l'asse orizzontale è stato suddiviso in gradi mentre sull'asse verticale sono stati riportati i valori delle proiezioni del raggio ruotante A_0 sui rispettivi assi delle x e delle y.

Osservando questa nuova rappresentazione grafica si vede che specialmente per i fenomeni oscillatori la rappresentazione mediante coordinate polari è molto

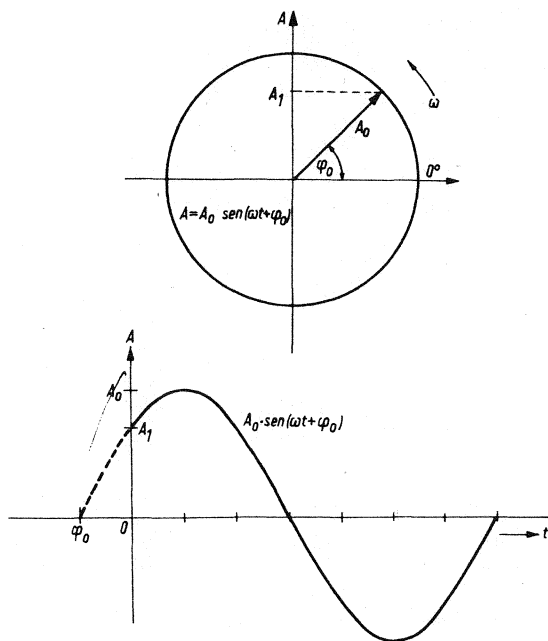


Fig. 5 - Definizione della pulsazione e di una semplice oscillazione sinusoidale.

più semplice e più chiara della rappresentazione mediante i semplici assi ortogonali (coordinate cartesiane).

IL CERCHIO-UNITA'

Siccome i fenomeni oscillatori vengono riferiti sempre ad una determinata frequenza sarà molto più semplice che il valore dell'angolo anziché essere espresso in gradi venga espresso in un corrispondente valore di arco (*) e che pertanto il valore della frequenza venga definito con

* In questo caso l'arco preso come unità di misura viene fatto uguale al raggio del rispettivo cerchio. Questo arco viene chiamato **radiante**.

questa nuova unità di misura. Questo passaggio dalla misura dell'angolo in gradi alla misura dell'angolo in radianti è illustrato nella fig. 4. Anche qui il cerchio-unità viene tracciato in un sistema di coordinate polari; con la differenza però che in questo caso viene assunto per la misura di tutta la circonferenza il valore 2π al posto di 360° . Analogamente 180° diventerà π e 90° diventerà $\pi/2$. Per quanto sopra detto è ovvio che la scrittura $\sin 90^\circ$ e $\sin \pi/2$ avranno lo stesso significato. Per qualsiasi angolo (φ) avremo

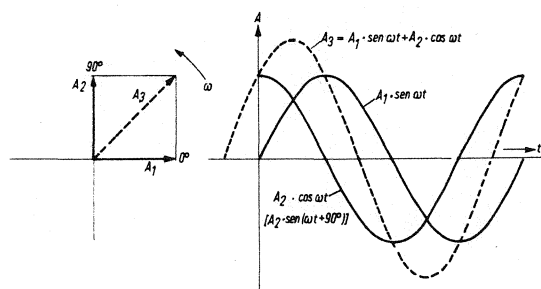


Fig. 6 - Somma vettoriale di due oscillazioni di uguale frequenza ma spostate di 90° .

quindi sempre un rapporto ben determinato rispetto al valore 2π , e cioè $\varphi = k \cdot 2\pi$. Riferito alla rappresentazione dei fenomeni periodici, questo fattore k sarà formato dalla frequenza di questi fenomeni periodici e da una corrispondente indicazione di tempo t . Se il raggio vettore percorre più volte al secondo la circonferenza del cerchio-unità, la sua velocità angolare sarà data da $\omega = 2\pi \cdot f$. Se immaginiamo di fermare in un dato istante t questo raggio vettore, la sua posizione risulterà completamente definita dalla velocità angolare ω e dal rispettivo tempo t . Avremo pertanto: $\omega = 2\pi f \cdot t = 2\pi t/T$. La velocità angolare (ω) moltiplicata per il tempo (t) indicherà quindi il valore dell'arco (riferito al valore di partenza per $t = 0$) percorso dal raggio vettore ruotante fino all'istante t .

Per la rappresentazione grafica di oscillazioni periodiche come appunto sono le funzioni di seno e coseno, una volta che sia stato indicato il valore della frequenza è possibile riportare sull'asse orizzontale il tempo t al posto delle unità in

radianti o in gradi. In fig. 5 è stata riportata la rappresentazione valida in generale per i fenomeni oscillatori: il raggio vettore A_0 ruota con velocità ω e il senso di rotazione, come per la corrispondente misura in gradi, si intende a sinistra dell'asse positivo (senso anti orario).

L'ampiezza del raggio vettore che ruota periodicamente riferita all'asse verticale è data dalla relazione $A = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$, che rappresenta la forma generale dei fenomeni oscillatori periodici. In questa relazione risultano definiti in grandezza: l'ampiezza con il valore massimo A_0 , la velocità di rotazione ω dell'oscillazione periodica, e infine la fase iniziale φ_0 . In questo caso la fase iniziale φ_0 significa che nell'istante prescelto t_0 , il raggio vettore A_0 non inizia sull'asse positivo delle x con 0° della sua oscillazione periodica. Nell'istante prescelto t_0 , l'oscillazione periodica non ha un'ampiezza zero ma un'ampiezza data da A_1 . L'angolo φ_0 dell'esempio citato, dato che si trova nella direzione positiva vuole indicare che la oscillazione periodica possiede nell'istante $t = 0$ un anticipo pari ad un angolo φ_0 . Riferito ad un sistema di assi ortogonali, il diagramma di questa oscillazione dovrà iniziare sull'asse orizzontale dei tempi t con un angolo di fase φ_0 a sinistra del punto di origine degli assi.

In base alla precedente definizione l'angolo di anticipo φ_0 vuole indicare che il punto zero dell'oscillazione inizia prima mentre un angolo di ritardo vuole indicare che il punto zero dell'oscillazione inizia dopo l'origine degli assi.

Il grande vantaggio della rappresentazione delle grandezze oscillatorie mediante il sistema delle coordinate polari lo si nota quando si vogliono confrontare e mettere in una certa relazione due o più oscillazioni.

ESEMPIO TIPICO

In fig. 6 è riportato un esempio tipico tratto dalla modulazione in quadratura (televisione a colori). Come si vede si hanno due tensioni alternate aventi la stessa frequenza ma sfasate di 90° l'una rispetto all'altra; di queste si vuole conoscere la risultante della loro somma. Questa condizione noi la ritroviamo nel mo-

duttore in quadratura della portante del colore nel quale com'è noto abbiamo due tensioni oscillanti modulate in ampiezza dai segnali differenza di colore del rosso (V) e del blu (U) le quali hanno la stessa frequenza ma sono sfasate di 90° .

La prima tensione oscillante possiede l'ampiezza A_1 e inizia nell'istante $t = 0$ sull'asse positivo delle x con un angolo di 0° . La seconda tensione oscillante possiede un'ampiezza A_2 uguale alla prima e inizia nell'istante $t = 0$ con un angolo in anticipo di 90° rispetto alla A_1 . Le tensioni A_1 e A_2 posseggono entrambi la stessa pulsazione ω . Volendo sommare queste due tensioni oscillanti bisognerà per prima cosa sommare i relativi vettori A_1 e A_2 . Ciò vuol dire che nell'eseguire questa somma si dovrà tener conto della fase e dell'ampiezza delle grandezze in gioco. Per far ciò si dovrà porre la « coda »

del vettore A_2 sulla « punta » del vettore A_1 . La retta congiungente la « punta » del vettore A_2 con la « coda » del vettore A_1 rappresenterà la risultante A_3 della somma vettoriale di A_1 e A_2 . **L'ampiezza** di A_3 sarà data dalla radice quadrata della somma dei quadrati di A_1 e A_2 mentre il valore **dell'angolo** nell'istante $t = 0$ sarà dato dal rapporto A_2/A_1 e attraverso la funzione tangente. Evidentemente è possibile anche sommare le ampiezze che le due sinusoidi A_1 e A_2 hanno in un determinato istante t e ottenere anche in questo caso una risultante A_3 che avrà ampiezza e angolo di fase corretti.

Da questo esempio risulta evidente che tutte e due queste rappresentazioni grafiche hanno la stessa forza probante con la differenza che la rappresentazione vettoriale è molto più semplice e di immediata comprensione.